ТЕПЛОФИЗИКА

Лекция №9

План лекции:

1. Краткие сведения из газодинамики неизотермического течения
2. Дифференциальные уравнения движения газа
3. Связь коэффициента теплоотдачи с полями температур и скоростей
4. Элементы теории подобия

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГАЗОДИНАМИКИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

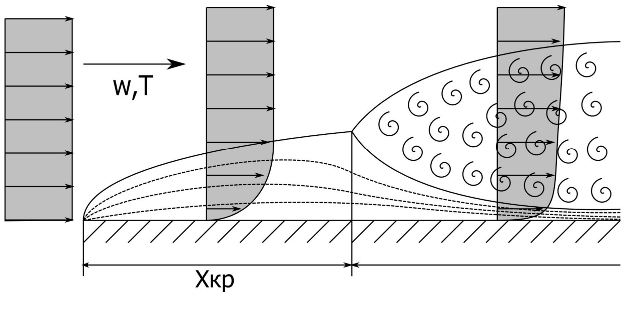
На предыдущих лекциях мы получили дифференциальное уравнение теплообмена, учитывающее перенос тепла за счёт теплопроводности и конвекции. Однако рассмотрели только задачи теплопроводности. Для определения конвективной составляющей теплообмена нам пришлось ввести так называемый коэффициент теплоотдачи. Вопрос об определении, которого мы оставили открытым.

Рассмотрим физику явления теплоотдачи

В процессе теплоотдачи **поверхность твердого тела обменивается теплотой с омывающим ее потоком жидкости или газа**. Частицы теплоносителя, непосредственно соприкасающиеся с твердой поверхностью, передают теплоту стенке теплопроводностью, в остальной части потока передача теплоты осуществляется **теплопроводностью и конвективным переносом.** В ламинарной части потока теплота передается в основном теплопроводностью, в турбулентной части потока конвективный перенос теплоты играет решающую роль.

Жидкости и газы имеют небольшие коэффициенты теплопроводности, поэтому **ламинарная часть потока теплоносителя создает большое термическое сопротивление** потоку теплоты. Факторы, способствующие перемешиванию жидкости, в том числе и турбулентность, создают благоприятные условия для распространения теплоты в жидкости.

Механизм переноса теплоты между жидкостью и поверхностью твердого тела, а также интенсивность его зависят, прежде всего, от условий движения теплоносителя.



На начальном участке поверхности, как правило, образуется **ламинарный пограничный слой**, толщина которого увеличивается. По мере удаления от входной кромки увеличение толщины ламинарного слоя приводит к уменьшению его устойчивости и происходит переход в **турбулентный режим течения**. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный сопровождается увеличением интенсивности теплоотдачи.

Движение теплоносителя вдоль стенки может быть **вынужденным или свободным**. При вынужденном движении скорость потока во много раз больше. Толщина пограничного слоя существенно зависит от скорости: чем больше скорость, тем меньше толщина этого слоя. При этом увеличение скорости способствует более раннему переходу ламинарного слоя в турбулентный и расширению области турбулентного пограничного слоя. Поэтому при вынужденном движении теплоотдача протекает значительно более интенсивно, чем при свободном.

Интенсивность теплоотдачи зависит также от физических свойств теплоносителя.

Теплопроводность жидкости влияет на термическое сопротивление ламинарной части потока жидкости.

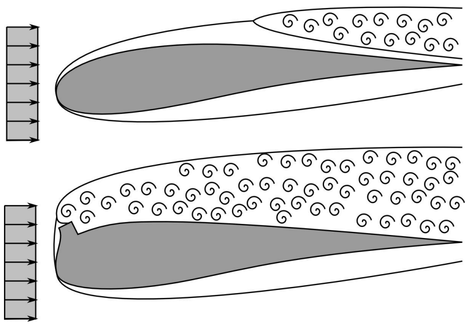
Вязкость жидкости оказывает влияние на толщину пограничного слоя и на условия перемешивания жидкости. При прочих равных условиях в более вязкой жидкости образуется более толстый пограничный слой, а условия перемешивания становятся менее благоприятными. Поэтому в вязких жидкостях теплоотдача протекает менее интенсивно.

Плотность теплоносителя также влияет на условия формирования пограничного слоя. Уменьшение плотности газа (например, воздуха с увеличением высоты полета) ведет к увеличению кинематического коэффициента вязкости, благодаря чему увеличивается толщина пограничного слоя. Поэтому уменьшение плотности газа ведет к уменьшению интенсивности теплоотдачи.

Зависимость плотности от температуры определяет подъемную силу, которая возникает в подогретой жидкости, и, следовательно, влияет на интенсивность свободного движения.

Теплоемкость жидкости влияет на интенсивность конвективного переноса теплоты. При одинаковых условиях перемешивания жидкость с большей теплоемкостью переносит больше теплоты, поэтому интенсивность теплоотдачи также возрастает.

Важную роль в процессе теплоотдачи играет форма обтекаемой поверхности.



При внешнем обтекании форма тела в значительной мере определяет условия формирования пограничного слоя. Хорошообтекаемые тела имеют значительную поверхность, покрытую ламинарным пограничным слоем, и, следовательно, неблагоприятные условия для теплообмена.

Всё перечисленное говорит о том, что коэффициент теплоотдачи зависит от скорости течения w, от коэффициента теплопроводности λ, вязкости μ, плотности ρ и теплоемкости c_p, от температур стенки и жидкости, от формы и размеров тела:

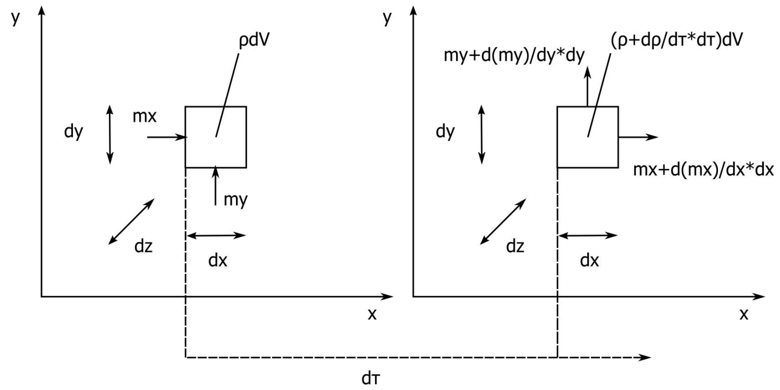
$$\alpha = f\left(w, \lambda, \mu, \rho, T, L, \text{форма...}\right) \tag{1}$$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Из представленного феноменологического анализа коэффициента теплоотдачи видно, что наибольшее влияние на его значение оказывает газодинамика течения. Получим дифференциальные уравнения описывающие течение газа.

2.1. Уравнение неразрывности.

Уравнение неразрывности представляет собой закон сохранения массы для элементарного объёма жидкости.



Баланс массы в элементарном объёме за время $d\tau$ равен:

$$\rho dV + m_x + m_y - \left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial\tau}d\tau\right)dV - \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right) - \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y}dy\right) = 0 \quad \Big| \times(-1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}d\tau dV + \frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial y}dy = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}d\tau dV + \frac{\partial(\rho w_x d\tau)}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial(\rho w_y d\tau)}{\partial y}dxdydz = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = 0} \qquad (2)$$

2.2. Уравнение движения.

В классической механике Ньютона движение материального объекта описывается законом сохранения импульса (второй закон Ньютона), который гласит - изменение импульса тела определяется векторной суммой всех сил действующих на тело и временем приложения этих сил.

$$d\vec{P} = \sum \vec{F} d\tau \qquad (3)$$

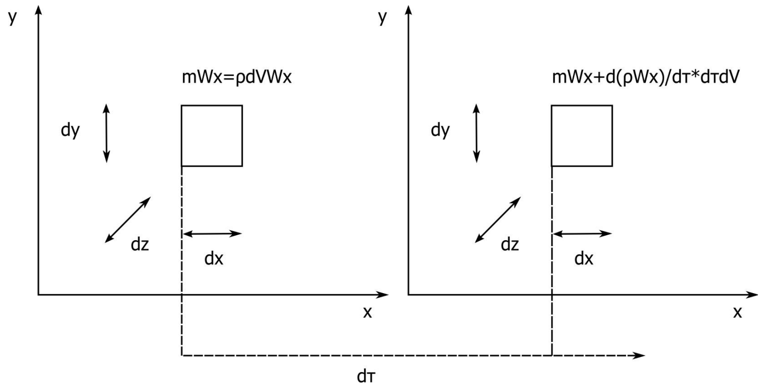
Рассмотрим механическое равновесие элементарного объема жидкости. Как и прежде ограничимся двумерной постановкой. Среди сил, действующих на элементарный объём, рассмотрим только **силу давления, силу тяжести, силу трения.**

Необходимо учесть, что импульс элементарного объёма газообразной или жидкой среды может изменяться и за счёт изменения плотности среды и поступления или отвода жидкости из элементарного объёма.

Поскольку уравнение (3) даётся в векторной форме, запишем его члены в проекции на ось координат.

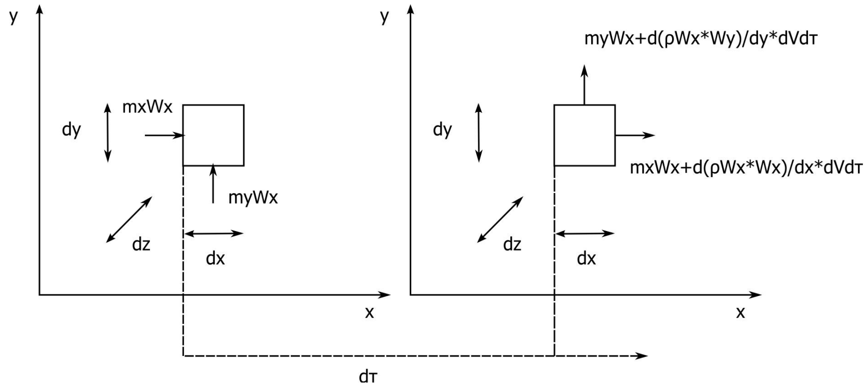
Рассмотрим проекцию на ось x:

Изменение импульса элементарного объёма за счёт изменения плотности можно записать следующим образом:



$$x:\quad dP_x = (P_x)_{\tau+d\tau} - (P_x)_\tau = (P_x)_\tau + \frac{\partial P_x}{\partial \tau}d\tau - (P_x)_\tau = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial \tau}dVd\tau = \boxed{\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial \tau}dxdydzd\tau} \quad (4)$$

Изменение импульса элементарного объёма за счёт подвода массы:

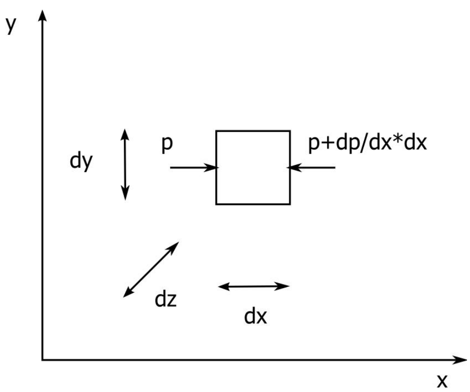


$$x:\quad dP_x = (P_x)_{x+dx} - (P_x)_x + (P_x)_{y+dy} - (P_x)_y = (P_x)_x + \frac{\partial P_x}{\partial x}dx - (P_x)_x + (P_x)_y + \frac{\partial P_x}{\partial y}dy - (P_x)_y =$$

$$\frac{\partial(\rho w_x dxdydz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\rho w_x dxdydz)}{\partial y}dy = \frac{\partial\left(\rho w_x (w_x d\tau) dydz\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\rho w_x dx \left(w_y d\tau\right) dz\right)}{\partial y}dy = \quad (5)$$

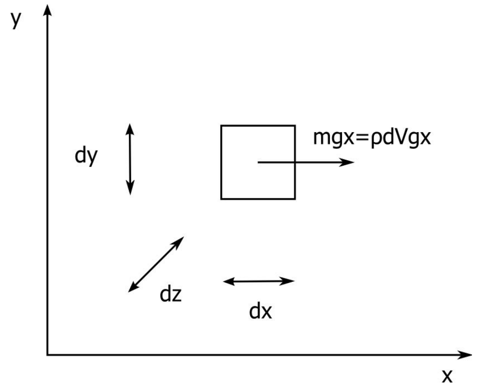
$$= \boxed{\frac{\partial(\rho w_x^2)}{\partial x}dVd\tau + \frac{\partial(\rho w_x w_y)}{\partial y}dVd\tau}$$

Действие силы давления:



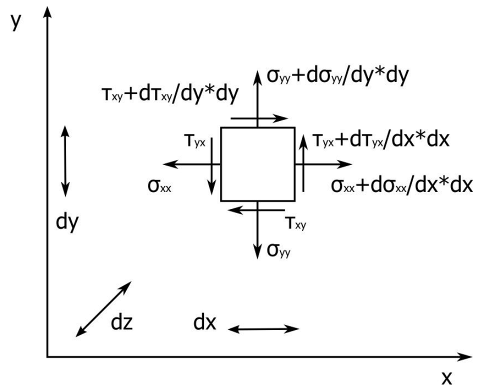
$$x:\quad \sum F_x \Rightarrow pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz = \boxed{-\frac{\partial p}{\partial x}dV} \qquad (6)$$

Действие массовой силы (силы тяжести):



$$x:\ \sum F_x \Rightarrow mg_x = \boxed{\rho g_x dV} \tag{7}$$

Для анализа действия силы трения необходимо рассмотреть напряжённое состояние элементарного объёма:



Сумма напряжений в проекции на ось x записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}x:\ \sum F_x \Rightarrow \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx - \sigma_{xx}\right)dzdy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dy - \tau_{xy}\right)dxdz = \\ = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dxdydz = \boxed{\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)dV}\end{gathered} \tag{8}$$

Объединяя уравнения (3), (4), (5), (6), (7) и (8) получим:

$$x:\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial \tau}dVd\tau + \frac{\partial\left(\rho w_x^2\right)}{\partial x}dVd\tau + \frac{\partial\left(\rho w_x w_y\right)}{\partial y}dVd\tau = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}dV + \rho g_x dV + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)dV\right)d\tau \tag{9}$$

или

$$x:\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial \tau} + \frac{\partial\left(\rho w_x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho w_x w_y\right)}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \tag{10}$$

По аналогии выводится уравнение движения в проекции на ось y:

$$y:\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial \tau} + \frac{\partial\left(\rho w_x w_y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho w_y^2\right)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \tag{11}$$

Используя уравнение неразрывности систему уравнений (10), (11) можно привести к виду:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\rho}{\partial\tau}+\dfrac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}=0\\
\rho\dfrac{\partial w_x}{\partial\tau}+\rho w_x\dfrac{\partial w_x}{\partial x}+\rho w_y\dfrac{\partial w_x}{\partial y}=\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x\\
\rho\dfrac{\partial w_y}{\partial\tau}+\rho w_x\dfrac{\partial w_y}{\partial x}+\rho w_y\dfrac{\partial w_y}{\partial y}=\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y
\end{cases}
\tag{12}
$$

Полученная система носит название **системы уравнений Навье - Стокса**.

Как видно система уравнений включает в себя растягивающие и сдвиговые напряжения трения на гранях элементарного объёма. Согласно гипотезе Ньютона эти напряжения можно связать с градиентами скоростей в соответствующих направлениях.

$$
\begin{gathered}
\sigma_{xx}=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial w_x}{\partial x}-\frac{\partial w_y}{\partial y}\right);\;\; \tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\\
\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\right);\;\; \sigma_{yy}=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial w_y}{\partial y}-\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)
\end{gathered},
\tag{13}
$$

где $\mu,[\text{Па}\cdot\text{с}]$ - коэффициент динамической вязкости газа.

Если принять, что плотность и вязкость газа слабо зависят от температуры и давления в потоке, то уравнения Навье - Стокса можно привести к более простому виду. В совокупности с уравнением теплообмена, полученным на предыдущих лекциях, и уравнением состояния идеального газа уравнения Навье - Стокса являются базой для теоретического анализа теплоотдачи от твёрдых поверхностей, омываемых потоком газа или жидкости:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial\tau}+\dfrac{\partial w_x}{\partial x}+\dfrac{\partial w_y}{\partial y}=0\\
\dfrac{\partial w_x}{\partial\tau}+w_x\dfrac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\dfrac{\partial w_x}{\partial y}=\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}\right)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+g_x\\
\dfrac{\partial w_y}{\partial\tau}+w_x\dfrac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\dfrac{\partial w_y}{\partial y}=\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}\right)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+g_y\\
\dfrac{\partial T}{\partial\tau}+w_x\dfrac{\partial T}{\partial x}+w_y\dfrac{\partial T}{\partial y}=\dfrac{\lambda}{\rho c_p}\left(\dfrac{\partial T^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial T^2}{\partial y^2}\right)\\
p=\rho RT
\end{cases}
\tag{14}
$$

3. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ С ПОЛЯМИ ТЕМПЕРАТУР И СКОРОСТЕЙ

Полученная система дифференциальных уравнений (14) справедлива в любой точке выделенной области течения. Однако решение этой системы уравнений возможно только при известных граничных условиях. Поскольку коэффициент теплоотдачи α определяется на стенке твёрдой поверхности необходимо рассматривать решение вблизи этой поверхности.

Из определения коэффициента теплоотдачи следует, что:

$$\alpha = \frac{q_{ст}}{T_ж - T_{ст}} \qquad (15)$$

Используя закон Фурье уравнение (15) можно привести к виду:

$$\alpha = \frac{-\left(\lambda_ж \dfrac{\partial T}{\partial n}\right)_{ст}}{T_ж - T_{ст}}, \qquad (16)$$

где: $\left(\dfrac{\partial T}{\partial n}\right)_{ст}$ - градиент температуры жидкости по нормали к теплообменной поверхности.

Другими словами **для определения коэффициента теплоотдачи при заданной температуре жидкости и температуре обтекаемой поверхности необходимо определить градиент температуры на стенке.**

Градиент температуры можно определить из решения уравнения энергии, которое в свою очередь зависит от распределения скорости потока в рассматриваемой области течения.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Система уравнений (14) в общем виде не поддаётся аналитическому решению. Разработанные на сегодняшний день численные методы решения с появлением современных компьютеров и суперкомпьютеров дают возможность анализировать достаточно сложные задачи теплообмена, как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения. Однако необходимость применение дорогостоящих вычислительных ресурсов и специализированных программ позволяет применять эти методики только в крупных исследовательских центрах и на ведущих предприятиях авиационной, космической, судостроительной, автомобильной отраслей.

До появления современных компьютеров основным методом исследования конвективного теплообмена был натурный эксперимент. Однако следует понимать, что любой эксперимент выполняется в конкретной установке с заданной конфигурацией. Поскольку газодинамика течения и соответственно теплообмен в значительной степени зависят от геометрии обтекаемой поверхности и параметров течения, то определённые в эксперименте коэффициенты теплоотдачи, строго говоря, справедливы только для этой конфигурации и этих параметров течения. Чтобы перенести эти данные на другие конфигурации или другие параметры течения **необходимо знать правила перевода**. Эти правила устанавливает **теория подобия**.

Теория подобия - это учение о подобных явлениях. В приложении к физическим явлениям теория подобия применяется по двум направлениям: как средство обобщения результатов физического и математического эксперимента и как теоретическая основа для моделирования технических устройств. Таким образом, **теория подобия позволяет на основании отдельных опытов или данных численного моделирования получить обобщенную зависимость** и открывает возможность изучения рабочих процессов технических устройств на моделях.

Для реализации подобия физических явлений необходима пропорциональность не только геометрических элементов систем, в которых протекают явления, но и других физических характеристик, определяющих эти явления (скоростей, температур, плотностей и т. п.).

Введем ряд понятий теории подобия. **Одноименными** называются величины, имеющие одинаковый физический смысл и одинаковую размерность. **Сходственными** называются такие точки систем, координаты которых удовлетворяют геометрическому подобию. **Сходственные моменты времени** наступают по истечении периодов времени, имеющих общее начало отсчета и связанных между собой константой подобия по времени.

Подобными называются физические явления, протекающие в геометрически подобных системах, если у них во всех сходственных точках в сходственные моменты времени отношения одноименных величин есть постоянные числа. Эти постоянные числа называются **константами подобия**.

Рассмотрим дифференциальное уравнение теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{-\left(\lambda_ж \dfrac{\partial T}{\partial y}\right)_{ст}}{T_ж - T_{ст}} \tag{17}$$

Запишем это выражение в общем виде для двух разных случаев:

$$\alpha' = \frac{-\left(\lambda' \dfrac{\partial T'}{\partial y'}\right)_{y'=0}}{T'_ж - T'_{ст}} \tag{18}$$

$$\alpha'' = \frac{-\left(\lambda'' \dfrac{\partial T''}{\partial y''}\right)_{y''=0}}{T''_ж - T''_{ст}} \tag{19}$$

Введём константы подобия в виде:

$$\begin{gathered} C_\alpha = \frac{\alpha''}{\alpha'};\quad C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'};\quad C_T = \frac{T''}{T'};\quad C_y = \frac{y''}{y'} \\ \alpha'' = C_\alpha \alpha';\quad \lambda'' = C_\lambda \lambda';\quad T'' = C_T T';\quad y'' = C_y y' \end{gathered} \tag{20}$$

Подставив уравнения (20), в соотношение (19) получим:

$$C_\alpha \alpha' = \frac{-\left(C_\lambda \lambda' \dfrac{\partial C_T T'}{\partial C_y y'}\right)_{C_y y'=0}}{C_T T'_ж - C_T T'_{ст}} \Rightarrow \alpha' = \frac{C_\lambda}{C_\alpha C_y} \frac{-\left(\lambda' \dfrac{\partial T'}{\partial y'}\right)_{y'=0}}{T'_ж - T'_{ст}} \tag{21}$$

Как видно уравнение (21), относящееся изначально к другому процессу, тождественно равно уравнению (18) при условии, что комплекс констант подобия:

$$\frac{C_\lambda}{C_\alpha C_y} = 1 \tag{22}$$

Воспользовавшись соотношениями (20) комплекс (22) можно привести к виду:

$$\frac{\alpha' y'}{\lambda'} = \frac{\alpha'' y''}{\lambda''}, \tag{23}$$

т.е. теплоотдача в двух различных, но подобных системах будет протекать одинаково, если в этих системах одинаковы значения комплекса:

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha y}{\lambda} = idem} \tag{24}$$

Эти комплексы называются числами подобия, и приведённое соотношение носит название числа Нуссельта (Числа подобия принято называть именами крупных учёных внесших вклад в развитие соответствующего направления науки).

С физической точки зрения константы подобия представляют собой отношение масштабов величин. Например, при обтекании плоской пластины за масштаб линейных размеров можно выбрать длину пластины, тогда:

$$\frac{y''}{L''} = \frac{y'}{L'}, \tag{25}$$

Отсюда константа подобия C_y может быть представлена, как:

$$C_y = \frac{y''}{y'} = \frac{L''}{L'} \tag{26}$$

Число Нуссельта в этом случае можно представить в виде:

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} = idem} \tag{27}$$

Таким образом, для характеристики подобия явлений можно использовать **константы подобия** и **числа подобия**.

Константы подобия сохраняют числовое значение только для двух подобных явлений, но они остаются одинаковыми для всех сходственных точек рассматриваемых систем. Поэтому константами подобия удобно пользоваться при моделировании технических устройств, когда необходимо получить подобие только между двумя явлениями.

Числа подобия сохраняют свое значение в сходственных точках всех подобных между собой систем, сколько бы их ни было, но в различных точках одной и той же системы числа имеют разные значения. Числами подобия удобно пользоваться при обработке опытных данных или данных численного моделирования, когда на основании изучения единичных явлений необходимо получить обобщенную зависимость, пригодную для всех подобных между собой явлений.

Формулы связи между числами подобия называются **уравнениями подобия**.